Considérese el sistema de ecuaciones lineales $AX = C$ (en notación matricial), siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

donde β, a, b y c designan números reales.

1. Si el sistema $AX = C$ es incompatible, entonces:

   a) no puede serlo; b) $\beta = 2$ y $c \neq a + b$; c) $\beta \neq 2$.

2. Si el sistema $AX = C$ es compatible determinado, entonces:

   a) no puede serlo; b) $\beta = 2$ y $c \neq a + b$; c) $\beta \neq 2$.

3. Si β, a, b y c son tales que el sistema $AX = C$ es compatible indeterminado, entonces todas las soluciones del sistema son las ternas de la forma:

   a) $(a-2\lambda,\ a+b-2\lambda,\ \lambda)$, donde λ es un número cualquiera

   b) $(a - \lambda - \mu,\ \lambda,\ \mu)$, donde λ y μ son números cualesquiera;

   c) el sistema no puede ser compatible indeterminado.

4. Si β, a, b y c son tales que el sistema $AX = C$ es compatible determinado, y (p, q, r) designa su única solución, entonces:

   a) $r = \dfrac{c-a-b}{\beta - 2}$; b) $q = a + b - \dfrac{c-a-b}{\beta-2}$;

   c) el sistema no puede ser compatible determinado.

5. Si β es tal que la matriz A es invertible, y $B = (b_{ij})$ designa su inversa (esto es: $B = A^{-1}$), entonces:

   a) $b_{33} = -\dfrac{\beta}{\beta-2}$; b) $b_{32} = \dfrac{1}{\beta-2}$;

   c) $b_{33} = \dfrac{1}{\beta-2}$.

Sea $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&0\\0&1&\beta\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$AX=C \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x_1 \quad +2x_3=a\\-x_1+x_2 \quad =b\\x_2+\beta x_3=c\end{matrix}\right\}$ Vamos a discutir el sistema

Es $|A|=\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&0\\0&1&\beta\end{vmatrix}=\beta-2$

Entonces si $\beta\neq 2$ es $r(A)=3=r(A^*)=$ nº de incóg $\Leftrightarrow$ según el T.ª de R.F. es comp. determinado

Si $\beta=2 \Rightarrow A|B=\left(\begin{matrix}1&0&2\\-1&1&0\\0&1&2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right) \Rightarrow r(A)=2$ pues $\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$

Hallemos el rango de A^*.

Es $\begin{vmatrix}1&0&a\\-1&1&b\\0&1&c\end{vmatrix}=c-a-b$

Concluimos que si $\left.\begin{matrix}\beta=2\\c-a-b\neq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow r(A)=2\neq r(A^*)=3 \Leftrightarrow$ sist. incompatible

si $\left.\begin{matrix}\beta=2\\c-a-b=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow r(A)=2=r(A^*)<$ nº de incóg. $\Rightarrow$ sist comp. indet.

(1) Si $AX=C$ es incompatible $\Rightarrow$
a) Falso
$\boxed{\text{b) } \beta=2,\ c\neq a+b \text{ (cierto)}}$
c) Falso

(2) Si $AX=C$ es comp det $\Rightarrow$
a) Falso
b) Falso
$\boxed{\text{c) } \beta\neq 2 \text{ (cierto)}}$

(3) Si $AX=C$ es comp. indeterminado $\Rightarrow$ la solución es $\boxed{\text{a) } (a-2\lambda,\ a+b-2\lambda,\ \lambda)\ \lambda\in\mathbb{R} \text{ (cierto)}}$
b) Falso
c) Falso

cálculos: Será $\beta=2$, $c=a+b$

y el sistema es $\left.\begin{matrix}x_1+2x_3=a\\-x_1+x_2 \quad =b\\x_2+2x_3=a+b\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_3=\lambda$

$x_1+2\lambda=a \rightarrow x_1=a-2\lambda$

$x_2=b+x_1 \rightarrow x_2=b+a-2\lambda$

Sol $\boxed{\begin{matrix}x_1=a-2\lambda\\x_2=a+b-2\lambda\\x_3=\lambda\end{matrix}}$

(4) Si es comp. determinado entonces la solución (p,q,r) es $\begin{cases} \text{a) } r = \dfrac{c-a-b}{\beta-2} \text{ (cierto)} \\ \text{b) Falso} \\ \text{c) Falso} \end{cases}$

Cálculos: Es $\beta \neq 2$

$$r = z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{vmatrix}} = \frac{c-a-b}{\beta-2}$$

(5) Si β es tal que A es invertible y $B = A^{-1}$ $\Rightarrow \begin{cases} \text{a) Falso} \\ \text{b) Falso} \\ \text{c) } b_{33} = \dfrac{1}{\beta-2} \end{cases}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj} A^t = \frac{1}{\beta-2}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_{33} = \frac{1}{\beta-2}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Adj} A^t = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

6. Dado el sistema $\{ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, formado por una única ecuación lineal y con cuatro incógnitas, todas sus soluciones son las cuaternas de la forma:

a) $(2 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$, donde λ_1, λ_2 y λ_3 son números reales cualesquiera;

b) $(2 - \lambda - \mu,\ \lambda,\ \mu,\ 0)$, donde λ y μ son números reales cualesquiera;

c) $(2 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$, donde λ_1, λ_2 y λ_3 son números reales cualesquiera.

(6) Si $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow$ Sol $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ x_2 = \lambda_1 \\ x_3 = \lambda_2 \\ x_4 = \lambda_3 \end{array}}$

a) Falso
b) Falso
$\boxed{\text{c) Cierto}}$

7. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ es

a) idempotente; **b)** ortogonal; **c)** nilpotente.

7 Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

Es $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow$ A es idempotente

$\boxed{\text{a (cierto)}}$

8. Una matriz cuadrada A es nilpotente si verifica (aquí I y O designan, respectivamente, la matriz identidad y la matriz nula del mismo orden que la matriz A):

a) $A^2 = A$; b) $A^2 = I$; c) $A^2 = O$.

8

A es nilpotente si ..... $A^2 = 0$

$\boxed{\text{Resp. correcta (c)}}$

Comentario:

Efectivamente, si $A^2 = 0 \Rightarrow A$ es nilpotente pero la implicación contraria no es correcta: Si A es nilpotente $\Rightarrow A^2 = 0$ no es cierto

pues puede ser que $\left.\begin{array}{l} A^2 \neq 0 \\ A^3 = 0 \end{array}\right\}$ y ser A nilpotente de tercer orden.

Dado un número real β, considérense los vectores $(1, 0, -2)$, $(1, 1, 1)$ y $(-2, -1, \beta)$ de $\mathbb{R}^3$.

9. Los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ si

a) $\beta \neq 3$; b) $\beta = 3$; c) $\beta = 1$.

10. Los tres vectores son linealmente dependientes si

a) $\beta \neq 3$; b) $\beta = 3$; c) $\beta = 1$.

11. Si el valor de β es tal que los vectores NO forman base, y denotamos por G el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que generan, entonces:

a) un sistema de ecuaciones implícitas de G es $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x \qquad\quad - z = 0, \end{cases}$ y por tanto G es una recta;

b) $G = \mathbb{R}^3$ cualquiera que sea el número β;

c) G es un hiperplano, y está determinado por la ecuación implícita $2x - 3y + z = 0$.

Dados los vectores $(1,0,-2)$, $(1,1,1)$, $(-2,-1,\beta)$

(9) Forman base $\Leftrightarrow$ $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & \beta \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & \beta \end{vmatrix} \neq 0$

Es $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & \beta \end{vmatrix} = \beta + 2 - 4 + 1 = \beta - 1$

Sol: $\boxed{\text{Forman base} \Leftrightarrow \beta \neq 1}$

las 3 alternativas
a) $\beta \neq 3$ (Falso pues para $\beta = 1$ no es base)
b) $\beta = 3$ (cierto pues $\beta = 3$ es distinto de 1)
c) $\beta = 1$ (Falso)

---

(10) Los 3 vectores $(1,0,-2)$, $(1,1,1)$, $(-2,-1,\beta)$ son linealmente dependientes $\Leftrightarrow$ $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & \beta \end{pmatrix} \neq 3 \Leftrightarrow \beta = 1$

Respuesta correcta c

(11) Si β es tal que no forman base, es decir, $\beta = 1$, y G es el subespacio que quieren....

Si $\beta = 1$ y es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$ pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y los vectores $\{(1,0,-2), (1,1,1)\}$ formarían base de G $\Rightarrow$ G sería un plano determinado por una sola ecuación implícita.

El único caso que verifica esto es c.

Observa que los 2 vectores de la base $\{(1,0,-2), (1,1,1)\}$ verifican la ecuación que proponen $2x - 3y + z = 0$

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, la codimensión de una recta es igual a

a) 3; b) 1; c) 2.

(12) En $\mathbb{R}^4$ la codimensión de una recta es .....

$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\text{recta}) + \text{codim}(\text{recta}) \Rightarrow 4 = 1 + \text{codim}(\text{recta})$

$\Rightarrow \text{codim}(\text{recta}) = 3$

Respuesta correcta a

13. Si una matriz de coeficientes técnicos no admite productos fundamentales, entonces:

a) admite un único conjunto autónomo;

b) es completamente descomponible;

c) es indescomponible.

13 Si una matriz de coeficientes técnicos no admite productos fundamentales $\Rightarrow$ es completamente descomponible, según teoría

Respuesta correcta b

14. Considérese la siguiente matriz de coeficientes técnicos:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Se verifica:

a) el bien 3 es el único producto fundamental, y la matriz es descomponible, pero no completamente descomponible;

b) hay exactamente dos productos fundamentales;

c) todos los bienes son productos fundamentales, y por tanto la matriz es indescomponible.

14

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$M(1) = \{1, 2, 3\}$ $\quad 1 \begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{smallmatrix}$

$M(2) = \{2, 3\}$ $\quad 2 \to 3 \to 3$

$M(3) = \{3\}$ $\quad 3 \to 3$

El único bien fundamental es el 3.

$\boxed{\text{Respuesta correcta a}}$

Considérese la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. El rango de la aplicación lineal f es igual a:

a) 3; b) 4; c) 2.

16. La aplicación lineal f verifica:

a) es inyectiva; b) no es ni inyectiva ni suprayectiva;

c) es suprayectiva.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en las $\mathcal{B}_c$

(15) rg de f = rg(A).

Es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rg$(A) \geq 2$

Orlamos:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1+2=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ pues $F_2 = F_3$

Concluimos que rg$(A) = 2$

$\boxed{\text{Resp. correcta (c)}}$

(16) Es rg$(A) = 2 \Rightarrow$ dim $\operatorname{Im} f = 2 \neq$ dim $\mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow$ No es suprayectiva

Es dim $\operatorname{Ker} f$ = dim $(\mathbb{R}^3)$ − dim $(\operatorname{Im} f) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow f$ no es inyectiva

$\boxed{\text{Resp. correcta (b)}}$

17. Considérese la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida de la forma $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -x_1 + x_2)$. La imagen recíproca (o inversa) por la aplicación lineal f del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ determinado por la ecuación implícita $y_1 + y_2 = 0$ es:

a) el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ determinado por la ecuación implícita $x_2 + x_3 = 0$;

b) $\{(0,0,0)\}$;

c) ninguna de las anteriores.

(17) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -x_1 + x_2)$

Sea $H = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 0\}$. Halla $f^{-1}(H) = G$

$$(x_1, x_2, x_3) \in G = f^{-1}(H) \leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) \in H \leftrightarrow$$

$$(\underbrace{x_1 + x_3}_{y_1}, \underbrace{-x_1 + x_2}_{y_2}) \in H \leftrightarrow$$

$$x_1 + x_3 + (-x_1 + x_2) = 0 \leftrightarrow x_2 + x_3 = 0$$

Sol $f^{-1}(H) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}$

$\boxed{\text{Sol correcta } a}$

Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

18. El polinomio característico de la matriz A es:

a) $\lambda^2 - 3\lambda - 28$; b) $\lambda^2 + 3\lambda - 28$;

c) $\lambda^2 + 3\lambda + 30$.

19. Los autovalores de la matriz A son:

a) -4 y 2; b) 7 y 4; c) 7 y -4.

20. El subespacio vectorial propio de la matriz A asociado al autovalor mayor es:

a) $L((1,-1))$; b) $L((5,6))$; c) $L((1,1))$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

(18) El polinomio característico es $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 = 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 30 = \lambda^2 - 3\lambda - 28$

Resp. correcta (a)

(19) Los autovalores de A son las soluciones de $|A - \lambda I| = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda - 28 = 0 \qquad \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 11}{2} = \begin{cases} 7 \\ -4 \end{cases}$

Los autovalores son -4 y 7

Respuesta correcta (c)

(20) Subespacio propio asociado a $\lambda = 7$

$E_{\lambda=7} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (A - 7I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$(A - 7I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} -6x_1 + 5x_2 = 0 \\ \cancel{-6x_1 - 5x_2 = 0} \end{array}\right\} \to x_1 = t$

$-6t + 5x_2 = 0 \to 5x_2 = 6t \to x_2 = \frac{6}{5}t$

$E_{\lambda=7} = \left\{ \left(t, \frac{6}{5}t\right), t \in \mathbb{R} \right\} = L\left\{ \left(1, \frac{6}{5}\right) \right\} = L\{(5,6)\}$

Resp. correcta (b)